UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - IMECC

A GEOMETRIA DO ORIGAMI

DISCENTES: SORAYA DE SOUZA SUZUKI 009916
RAFAELLA CAMARGO MARQUES 981975
DANILO PARRA 008453

NOVEMBRO/06

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - IMECC

A GEOMETRIA DO ORIGAMI

TRABALHO APRESENTADO NA DISCIPLINA:

“MA241 – GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO GEOMÉTRICO”

DOCENTE RESPONSÁVEL: ELIANE QUELHO FROTA REZENDE

DISCENTES: SORAYA DE SOUZA SUZUKI 009916
RAFAELLA CAMARGO MARQUES 981975
DANILO PARRA 008453

NOVEMBRO/06

ÍNDICE

Introdução

ORIGAMI

折り紙

História do Origami

A palavra japonesa origami quer dizer "dobrar papel" (ori = dobrar; kami = papel) e se refere a uma arte hoje disseminada pelo mundo inteiro. Apesar de ser um patrimônio da cultura japonesa, é provável que tenha começado na China, a qual é considerada "o berço do papel".

Conforme se foram desenvolvendo métodos mais simples de criar papel, o papel foi tornando-se menos caro, e o Origami, cada vez mais uma arte popular. Contudo, os japoneses sempre foram muito cuidadosos em não desperdiçar; guardavam sempre todas as pequenas réstias de papel, e usavam-nas nos seus modelos de origami.

Durante séculos não existiram instruções para criar os modelos origami, pois eram transmitidas verbalmente de geração em geração. Esta forma de arte viria a tornar-se parte da herança cultural dos japoneses. Em 1787 foi publicado um livro (*Hiden Senbazuru Orikata*) contendo o primeiro conjunto de instruções origami para dobrar um pássaro sagrado do Japão. O Origami tornou-se uma forma de arte muito popular, conforme indica uma impressão em madeira de 1819 intitulada "Um mágico transforma folhas em pássaros", que mostra pássaros a serem criados a partir de folhas de papel.

Pégaso, um cavalo alado.

Em 1845 foi publicado outro livro (*Kan no mado*) que incluía uma coleção de aproximadamente 150 modelos Origami. Este livro introduzia o modelo do sapo, muito conhecido hoje em dia. Com esta publicação, o Origami espalha-se como atividade recreativa no Japão.

Não seriam apenas os Japoneses a dobrar o papel, mas também os Mouros, no Norte da África, que trouxeram a dobragem do papel para Espanha na sequência da invasão árabe no século VIII. Os mouros usavam a dobragem de papel para criar figuras geométricas, uma vez que a religião proibia-os de criar formas animais. Da Espanha espalhar-se-ia para a América do Sul. Com as rotas comerciais marítimas, o Origami entra na Europa e, mais tarde, nos Estados Unidos.

Origami na Alemanha

Friedrich Froebel (1782-1852) foi o fundador do Movimeto Kindergarten que iria introduzir as dobragem de papel nas atividades pré-escolares. Porém, estas seriam desenvolvidas principalmente pelos seus seguidores, após a sua morte.

O Movimento Kindergarten foi levado para o Japão por uma senhora alemã, obtendo considerável aceitação. As dobragem de papel eram ensinadas às crianças e fundiram-se com o tradicional Origami. Com efeito, muitos dos modelos eram semelhantes e o Origami foi trazido de casa para a escola.

Froebel nunca conheceu o termo "Origami" nem este foi alguma vez usado pelo Movimento Kindergarten.

A divisão do Origami

Antigamente os modelos se mantinham inalterados, até que de uns 50 anos para cá, o japonês Akira Yoshisawa, começou a criar novos modelos. Novas técnicas foram desenvolvidas, aumentando as possibilidades da arte de dobrar papel.

A grande divisão entre a antiga dobragem do papel e a nova surgiu cerca de 1950 quando o trabalho de Akira Yoshizawa se tornou conhecido. Foi Yoshizawa quem criou a idéia da dobragem criativa (Sasaku Origami) e inventou todo um conjunto de métodos que nada deviam ao origami do passado, permitindo *dobrar* uma série de animais e pássaros. Porém, ainda precisava de duas partes de papel para conseguir animais de quatro patas, o que só viria a ser ultrapassado com a invenção das Bases Blintzed em meados da década de 1950 por outros entusiastas, particularmente o norte-americano George Rhoades. Até lá, apenas era possível *dobrar* animais muito primitivos, incluindo o tradicional porco.

Porém, o trabalho de Yoshizawa já tinha tido um predecessor: Miguel Unanumo, um filósofo da Universidade de Salamanca.

Imaginação, conhecimento e habilidade: este é o instrumental que nos permite criar esculturas em papel. Porém, é preciso não violar certos princípios, como num jogo. Há condições fundamentais:

- utilizar uma folha quadrada;
- não cortar;
- não colar.

Um leve relaxamento nas regras permite dobrar retângulos, triângulos e outros polígonos, incluindo o papel circular. Embora se considere que as operações de cortar, colar e decorar empobreçam esta arte, elas podem ser praticadas, desde que com moderação e bom senso.

Hoje em dia podemos encontrar grandes mestres em dobraduras praticamente no mundo todo. Novas e melhores técnicas de dobradura desenvolvidas atualmente deixariam boquiabertos os mestres da antiguidade. Enquanto na antiguidade era considerada uma proeza a criação de uma dobradura que apenas representasse um inseto, por exemplo - com corpo segmentado e múltiplas pernas - hoje em dia a criação de insetos anatomicamente correto é bastante corriqueira, sendo que o desafio atual consiste em criar insetos de espécies reconhecíveis.

Aerogami

Aerogami é um ramo do origami que trata dos modelos aerodinâmicos. Distingue-se do avião de papel em que apenas inclui modelos criados através da dobragem do papel. É de salientar que os aviões de papel são apenas parte do aerogami, já que os modelos de aerogami podem ser também flutuadores, por exemplo, já que também estes exibem propriedades aerodinâmicas interessantes.

O Origami e a Matemática

A prática e o estudo do Origami envolve vários tópicos de relevo da matemática. Por exemplo, o problema do *alisamento da dobragem* (se um modelo pode ser *desdobrado*) tem sido tema de estudo matemático considerável.

A dobragem de um modelo alisável foi provado por Marshall Bern e Barry Hayes como sendo um problema NP completo (diretamente relacionado com a Matemática Aplicada).

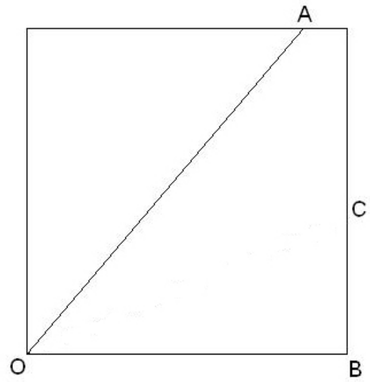
O problema do Origami rígido ("se o papel for substituído por metal será ainda possível construir o modelo?") é de grande importância prática. Por exemplo, a *dobragem Miura* é uma dobragem rígida que tem sido usada para levar para o espaço grelhas de painés solares para satélites.

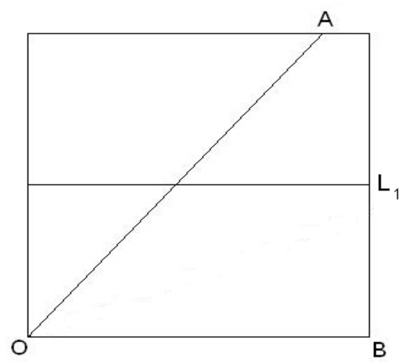
A Trissecção de um Ângulo

Como dividir um ângulo dado em partes iguais usando dobradura? Considerado um dos problemas clássicos da Antiguidade e nem sempre resolvível usando uma régua não-graduada e compasso, a trissecção de um ângulo arbitrário pode ser feita usando a dobradura. O interesse que havia na resolução desse problema pelos geômetras gregos se devia ao fato que isso possibilitaria a construção de polígonos regulares com quantidade qualquer de lados.

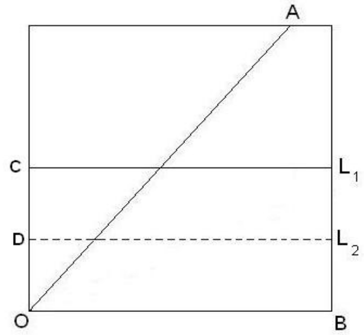
Achar através de dobradura a bissetriz de um ângulo qualquer dado é fácil. Basta vincar o ângulo, sobrepondo os lados. Agora iremos explicar o procedimento para dividir um ângulo qualquer em três partes iguais.

Partindo de uma folha quadrada de papel de dimensão arbitrária. Considerando um ângulo qualquer demarcado por um vinco no papel, dobrar o quadrado em duas partes iguais. Estamos considerando para efeitos de exemplo a trissecção de um ângulo agudo; entretanto o método pode ser estendido eficientemente a ângulos obtusos.

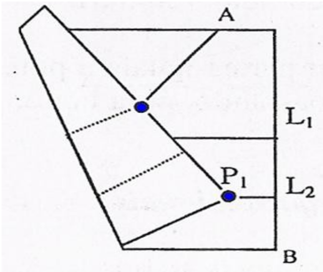




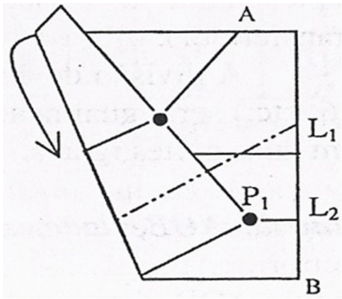
Dobrar a metade inferior do quadrado também ao meio.

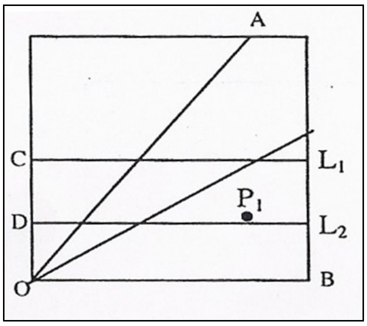


Dobrar o papel de modo que o ponto O fique sobre a linha L2 e o ponto C sobre a Linha AO.

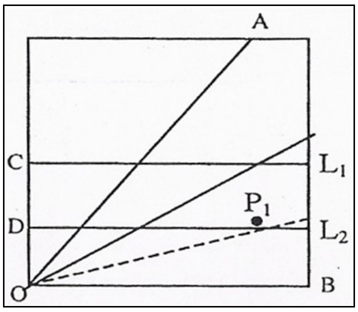


Dobrar o papel para trás prolongando até o vértice do quadrado conforme a linha tracejada na figura.



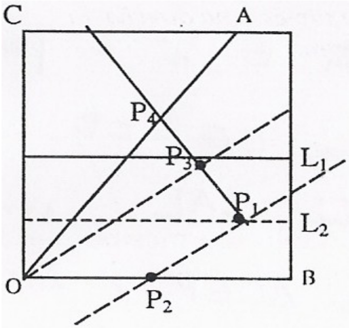


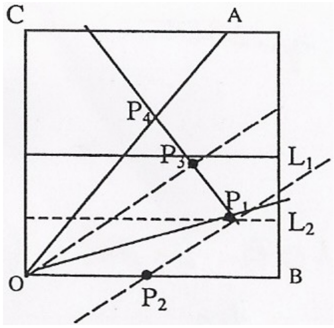
Vincar uma linha passando pelos pontos O e ponto P1. As linhas dividirão o ângulo em 3 partes iguais.



Para demonstrar que de fato o ângulo foi trisseccionado, iremos analisar os triângulos formados conforme as figuras abaixo. Pelo procedimento, temos que $P_1OB = P_3O\ P_1$, pois o ângulo P_3O B foi dividido em dois iguais.

Também pela construção temos que os segmentos paralelos OB, L_1 e L_2 são eqüidistantes. Portanto, $OP_1 = A'P_4$. Também temos que o segmento OP_3 é perpendicular ao segmento P_1P_4. A partir disso concluímos que os triângulos OP_1P_3. e OP_3P_4 são iguais e portanto o ângulo desejado foi divido em três partes iguais





O PROBLEMA DELIANO

Conta Eratóstenes que, certa vez na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo o que fazer para combater uma peste que assolava o povo. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, de forma cúbica, devia ser duplicado. Assim, teria nascido o problema geométrico da duplicação do cubo, também conhecido como “problema deliano”, que se tornou um dos problemas clássicos da Antiguidade. Podemos enunciá-lo também desta forma: dada a aresta de um cubo, construir a aresta de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do primeiro. Os matemáticos gregos já tinham resolvido a questão da duplicação de um quadrado, e parece natural que tenham estendido-a ao caso do cubo.

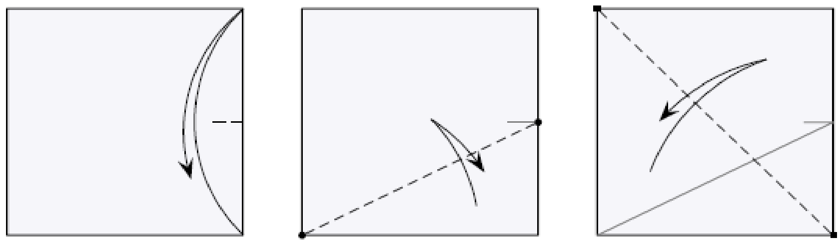
Seja um segmento de reta de cumprimento *a*. O cubo que tem tal segmento como aresta terá volume $Va = a^3$. Queremos, então, obter um segmento de reta de cumprimento *b*, tal que o cubo associado, de volume $V_b = b^3$, satisfaça $Vb = 2Va$. Destas fórmulas obtemos a relação (b/a) = $2^{(1/3)}$. Assim, o problema se reduz a calcular a raiz cúbica de 2 (i.e, obter 2 segmentos de reta cujos comprimentos estejam na relação 1 : $2^{(1/3)}$).

Numerosas soluções foram propostas usando todo tipo de artifícios, já desde o século V a.C., com uma construção tridimensional devida a Arquitas. Entretanto, o problema se tornaria famoso quando considerado sob a seguinte restrição: deve ser resolvido em um número finito de passos usando apenas régua e compasso, onde a régua deve ser utilizada apenas para traçar linhas retas, e não para medir. Todos temos estudado muitos problemas de construção similares na escola, os que constituem os fundamentos da geometria elementar. De fato, é possível definir a geometria euclideana como “a ciência daquilo que pode ser construído com régua e compasso” .

A solução ao problema deliano, com a restrição citada, foi procurada em vão durante séculos. Só a partir dos trabalhos em álgebra de Ruffini, Abel e Galois, no século XIX, demostrou-se que é impossível fazer tal construção. Resulta curioso, então, que seja possível resolvê-lo apenas dobrando uma folha de papel. Acaso a dobradura de uma folha é uma ferramenta geométrica mais poderosa que a combinação de régua e compasso? Surpreendentemente, a resposta é *afirmativa.*

Resolução

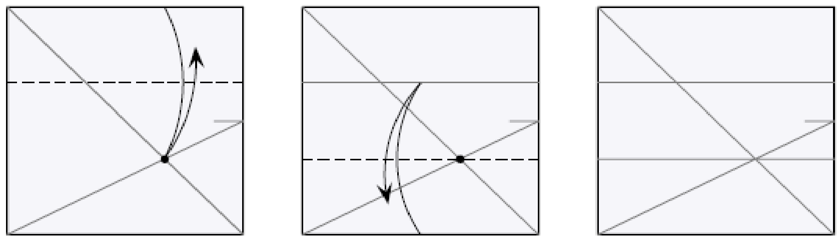
Partimos de uma folha quadrada de papel, de dimensão arbitrária. A solução consta de duas etapas; primeiramente, devemos dividir a folha em três partes iguais. Isso pode ser feito por meio dos seguintes passos:



(1) Marcar o ponto médio na borda direita.

(2) Dobrar e abrir.

(3) Dobrar e abrir.

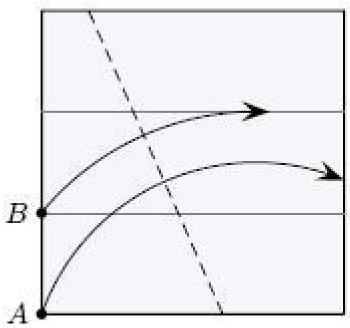


(4) Dobrar horizontalmente, de forma que a borda superior toque a intersecção das linhas de dobrado anteriores, e abrir.

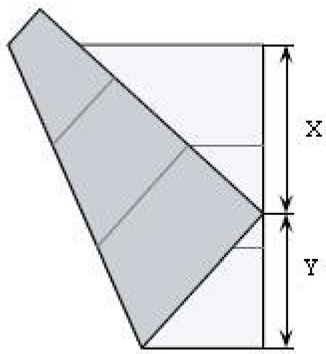
(5) Dobrar horizontalmente, de forma que a borda inferior toque a linha de dobrado anterior, e abrir.

(6) As linhas de dobrado horizontais dividem a folha em três partes iguais.

Os seguintes passos, finalmente, determinam $2^{(1/3)}$. As linhas de dobrado que não são relevantes foram eliminadas, para maior clareza.



(7) Dobrar de forma que o ponto A fique sobre a borda direita, e o ponto B sobre a linha horizontal indicada.

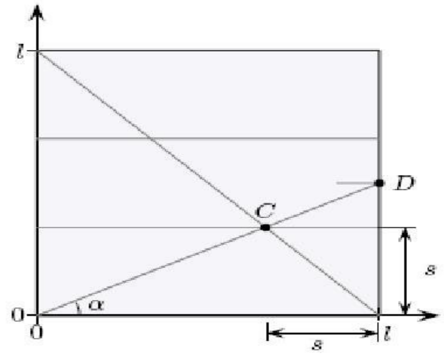


$$\frac{X}{Y} = \sqrt[3]{2}$$

(8) Resultado final.

Demonstração

Demonstremos primeiro que a sequência de passos (1)-(6) divide a folha de papel em 3 partes iguais. O seguinte diagrama reproduz o resultado no passo (6). Atribuímos um par de eixos cartesianos $x - y$, com origem no canto inferior esquerdo da folha de papel. Como indicado, o comprimento dos lados da folha é l.



O ponto C está a mesma distância das bordas inferior e direita da folha, que chamaremos de s, assim suas coordenadas são $(x_C, y_C) = (l - s, s)$. As coordenadas do ponto D são $(x_D, y_D) = (l, l/2)$. Podemos então dizer que:

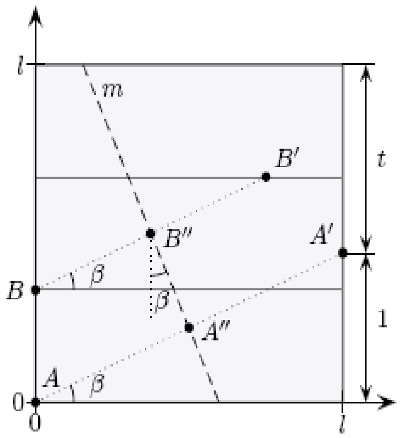
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{y_C}{x_C} = \frac{s}{l-s} \\ &= \frac{y_D}{x_D} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Igualando ambas equações, obtemos:

$$\frac{s}{l-s} = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{l}{3}$$

Pelos passos (4) e (5), a distâcia entre ambas linhas de dobrado horizontais, e entre a linha superior e a borda superior da folha, também deve ser $l/3$.

Demostremos agora que a dobra do passo (7) determina $2^{(1/3)}$ sobre a borda direita da folha. Para isso, colocamos novamente um par de eixos cartesianos $x - y$, com origem no canto inferior esquerdo da folha de papel.



Os pontos A e B são os indicados no passo (7) anterior, e têm coordenadas $(x_A , y_A) = (0, 0)$ e $(x_B, y_B) = (0, l/3)$, respectivamente. Nesse mesmo passo, realizamos a dobra sobre a linha m, e os pontos A e B passam a ocupar as posições A' e B', respectivamente, de coordenadas $(x_{A'} , y_{A'}) = (l, 1)$ e $(x_{B'} , y_{B'}) = (a, 2l/3)$, onde a designa a abcissa do ponto B'. Os pontos A'' e B'', sobre a linha de dobrado, são os pontos médios dos segmentos AA' e BB', respectivamente, e têm coordenadas $(x_{A''} , y_{A''}) = (l/2, 1/2)$ e $(x_{B'''} , y_{B''}) = (a/2, l/2)$.

Pela geometria da figura, os três ângulos designados por β, com vértice em A, B, e B'', são iguais. Calculemos o valor de tg β em cada caso:

$$
\begin{aligned}
\text{tg } \beta &= \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{1}{l} && (1) \\
&= \frac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \frac{l/3}{a} && (2) \\
&= \frac{x_{A''} - x_{B''}}{y_{B''} - y_{A''}} = \frac{l-a}{l-1} && (3)
\end{aligned}
$$

Igualando as equações (1) e (2), obtemos:

$$\frac{1}{l} = \frac{l}{3a} \Rightarrow a = \frac{l^2}{3}$$

Similamente, igualando (1) e (3):

$$\frac{1}{l} = \frac{l-a}{l-1}$$

Substituindo o valor de *a* nessa equação e operando, obtemos:

$$l^3 - 3l^2 + 3l - 3 = 0$$

Essa equação pode ser reescrita na forma:

$$(l - 1)^3 - 2 = 0$$

Finalmente, substituindo $t = l - 1$, obtemos:

$$t^3 - 2 = 0 \implies t = 2^{(1/3)}$$

o que prova a solução do problema deliano.

Comentário

A raiz cúbica de 2 é a solução da equação $x^3 - 2 = 0$. Com dobraduras de uma folha de papel, é possível resolver qualquer equação cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, o que é impossível de ser feito com régua e compasso. Isso permite resolver outros problemas geométricos de construção que possam ser reduzidos a uma equação cúbica, como a trissecção de um ângulo, e a construção de um heptágono regular.

Conclusão

O Origami é um poderoso instrumento para o ensino da matemática. É uma das raras oportunidades no ensino da matemática onde se pode pôr a “mão”no objeto de estudo. Como afirma Tomoko Fuse, origamista japonesa:

> *“Todo origami começa quando pomos as mãos em movimento. Há uma grande diferença entre conhecer alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato.”*

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Jorge C. Lucero – Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, www.mat.unb.br/~lucero/

- A geometria do Origami – Rogéria Gaundêncio do Rêgo – Editora Univesitária UFPB

- Geometria das dobraduras – Luiz Márcio Imenes – Editora Scipione

- http://geocities.com/superjapanbr/origami.html

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Origami