O uso do origami na prática de professores que ensinam matemática: uma abordagem axiomática em construções geométricas

The use of origami in the practice of teachers teaching mathematics: an axiomatic approach in geometric constructions

Anita Lima Pimenta[1]

Eliane Scheid Gazire[2]

RESUMO

Este estudo faz referência a parte de uma pesquisa desenvolvida com 14 professores das áreas de Artes, Física, Pedagogia e Matemática, em uma escola da rede Municipal de Belo Horizonte. A escolha do público-alvo se deu por considerar que esses profissionais, em algum momento de sua prática pedagógica, ensinam Matemática, em especial a Geometria. O objetivo da pesquisa foi inserir a técnica do Origami em sala de aula, na expectativa de que, com sua abordagem axiomática, a aprendizagem da Geometria se tornasse mais significativa, proporcionando maior compreensão no estudo dos Poliedros Regulares, também conhecidos como Poliedros Platônicos. A fim de observar os benefícios na aprendizagem geométrica a partir das construções com Origami organizaram-se oficinas, divididas em três momentos. Ao final das atividades, os participantes responderam a um questionário contendo dez questões acerca das práticas realizadas nas oficinas. Os resultados mostram que há benefícios na aprendizagem geométrica com o uso dessa técnica. Ela traz consigo a arte de dobrar papel e se torna eficiente quando utilizada como um recurso didático nas aulas de diversas disciplinas que utilizam a Geometria com diferentes abordagens.

Palavras-chave: Geometria. Origami. Poliedros Regulares. Professores de Matemática.

ABSTRACT

This study refers to part of a research developed with 14 professors from the areas of Arts, Physics, Pedagogy and Mathematics in a school of the Municipal network of Belo Horizonte. The choice of the target audience was due to the fact that these professionals, at some point in their pedagogical practice, teach mathematics, especially Geometry. The objective of the research was to insert the Origami technique in the classroom, in the expectation that, with its axiomatic approach, the learning of Geometry would become more meaningful, providing greater understanding in the study of Regular Polyhedra, also known as Platonic Polyhedra. In order to observe the benefits in geometric learning from the constructions with Origami, workshops were organized divided in three moments. At the end of the activities, the participants answered a questionnaire containing ten questions about the practices performed in the workshops. The results show that there are benefits in geometric learning with the use of this technique. It brings with it the art of folding paper and becomes efficient when used as a didactic resource in the classes of several disciplines that use Geometry with different approaches.

Keywords: Geometry. Origami. Regular Polyhedra. Maths Teachers.

[1] Mestre em ensino de Ciências e Matemática, licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Atua na docência do Ensino Fundamental e Superior. E-mail: anitallima@yahoo.com.br.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Coordenadora e docente no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). E-mail: egazire@terra.com.br.

Recebido em: 18/12/2018 Aceito em: 27/03/2019

1 INTRODUÇÃO

De origem japonesa, a palavra Origami significa dobrar papel. Prieto (2002) explica que *Ori*: dobrar – deriva do desenho de uma mão – e *Kami*: papel – provém da representação de uma seda. Essa arte foi estabelecida por todo o mundo. No Brasil, é conhecida como dobradura, na língua espanhola como *papiroflexia*, no inglês como *paperfolding*.

Acredita-se que essa arte seja tão antiga como a origem do papel. A esse respeito, Kanegae e Imamura (1989) contam que é possível que ela não seja de exclusividade japonesa, como lhe é comumente atribuído, já que existem relatos de que o papel possa ter surgido na China.

Engel (1994) descreve os três períodos nos quais a história do Origami foi dividida:

- 1º Período – Heian (794 a 1185): entretenimento das classes mais abastadas, pois eram as únicas que tinham condições de adquirir o papel, que era uma rara e preciosa mercadoria.
- 2º Período – Muromachi (1338 a 1573): o papel tornou-se mais acessível e o Origami começou a ser utilizado para diferenciar as classes sociais.
- 3º Período – Tokugawa (1603 a 1867): esse período ficou conhecido como a democratização do papel.

Rego, Rego e Gaudêncio Jr. (2003) contam que a prática do Origami era costume passado de pai pra filho e não havia registros de diagramas que orientassem a reprodução dos modelos. Foi somente com a popularização do papel que houve uma maior divulgação dessa arte e, no ano de 1876, tornou-se parte do currículo escolar japonês.

Alguns nomes de impulsionadores dessa técnica surgiram no Oriente e no Ocidente, como: Leonardo da Vinci (séc. XV, na Itália); Friedrich Froebel (séc. XIX, na Alemanha); Miguel Unamuno (séc. XX, na Espanha); e Akira Yoshizawa (séc. XX, no Japão); esse último conhecido como o "pai do Origami moderno", pois criou a simbologia com instruções que constituem a linguagem do Origami, como conta Rafael (2011). Não é preciso saber japonês para compreender um diagrama de Origami, já que esta é uma linguagem universal, tal como a Matemática.

A Europa, através da Espanha, recebeu as primeiras informações sobre esta arte com os mouros. No Brasil, o Origami ficou conhecido como "a arte de dobrar papel" e teve influências da Argentina e dos imigrantes japoneses, a partir de 1908.

Rego, Rego e Gaudêncio Jr. (2003, p. 25) contam que "A religião dos mouros proibia a criação de qualquer representação simbólica de homens ou animais através do Origami". Isso fez com que a arte fosse cada vez mais associada às construções geométricas. As regularidades encontradas nas dobraduras de papel aguçaram a curiosidade de estudiosos que foram buscando estabelecer conexões dessas dobragens com a Matemática e, mais especificamente, com a Geometria.

Devido a essas conexões estabelecidas, no final do século XX, os matemáticos começaram a se interessar por esta arte. Muitos perceberam que as diversas criações feitas por Origami iam muito além da inspiração, da criatividade e da arte, estando, na verdade, associadas a conceitos e limitações geométricas.

Esta pesquisa se propôs a investigar os benefícios na aprendizagem geométrica a partir das construções com Origami e as contribuições que eles trazem para o ensino da Matemática em especial na Geometria. Como público-alvo, envolveu 14 professores de áreas distintas – Pedagogia, Artes, Física e Matemática –, que participaram de oficinas compostas por atividades com Origami que abordam construções geométricas.

A escolha desse público se deu por perceber que, em algum momento de sua prática pedagógica, esses profissionais utilizam da Matemática em suas aulas, ou seja, precisam buscar conhecimentos geométricos, a fim de transmiti-los para seu aluno. Portanto, o objetivo da pesquisa foi inserir a técnica do Origami em sala de aula, na expectativa de que, com sua abordagem axiomática, a aprendizagem da Geometria se tornasse mais significativa, proporcionando maior compreensão no estudo dos Poliedros Regulares, também conhecidos como Poliedros Platônicos. Desmistificando a ideia de utilizar essa técnica apenas nas aulas de Geometria, expandimos a proposta para professores de áreas distintas que ensinam Matemática.

2 A GEOMETRIA E O ORIGAMI

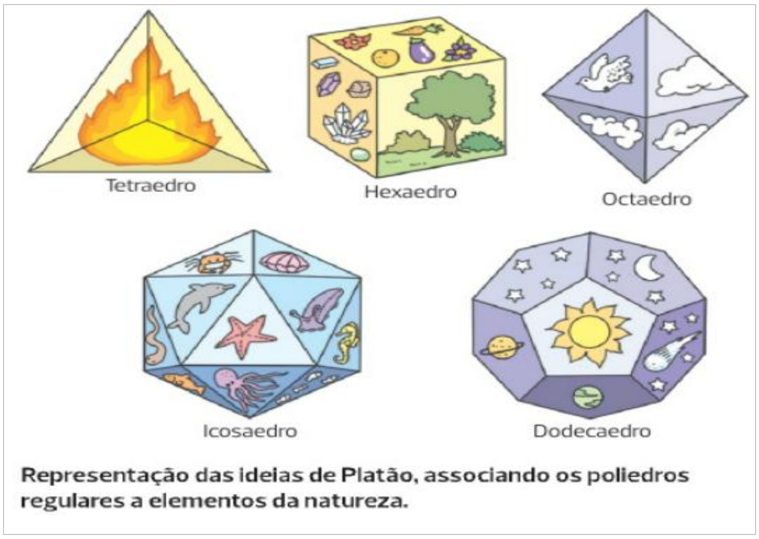
De origem grega, a palavra *poliedro* significa “várias faces”: *poli* = várias e *edro* = faces e denomina sólidos geométricos formados através da junção de várias figuras planas e que podem ser regulares ou não. Neste estudo, serão as propostas construções dos Poliedros Regulares.

Dante (2005) recorre à história para informar que Platão, filósofo grego, teve muito entusiasmo com a Matemática em sua obra “Timaeus”, na qual explana seus pensamentos sobre os sólidos em um possível encontro com o pitagórico Timeu de Locri. Neste diálogo, ele expôs suas ideias sobre os Poliedros Regulares, que ficaram conhecidos como Poliedros Platônicos. Alguns historiadores atribuem aos pitagóricos e a Teeteto as descobertas desses poliedros. Dante (2005) conta que:

> Neste trabalho de Platão, Timeu misticamente associa o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo aos quatro "elementos" primordiais de todos os corpos materiais: fogo, ar, água e terra. Ele associou o quinto poliedro, o dodecaedro, ao Universo que nos cerca. E então? Você acha justo chamar esses poliedros de poliedros de Platão? (DANTE, 2005, p.98).

O tetraedro, o octaedro e o icosaedro são poliedros constituídos por faces triangulares, cada um composto por quatro, oito e vinte triângulos equiláteros, respectivamente. Os outros dois sólidos são o hexaedro, formado por seis quadrados (conhecido como cubo) e o dodecaedro obtido através da junção de doze pentágonos regulares, como mostra a figura 1.

Figura 1 – Representação das ideias de Platão e suas associações a elementos da natureza



Fonte: DANTE, 2015, p.80.

Platão, ainda nos dias atuais, é muito lembrado por suas contribuições filosóficas e de acordo com Dante (2005), o filósofo era conhecido como "criador de matemáticos". Fundou a Academia em Atenas, considerada a primeira Universidade no mundo que continha, em sua porta, a seguinte escritura: "Que ninguém que ignore a Geometria entre aqui".

O quadro 1 classifica os poliedros e para melhor compreensão, é necessário associar as letras F, V e A, respectivamente, a faces, vértices e arestas:

Quadro 1 - Classificação dos Poliedros Platônicos

Denominação do Poliedro	F	V	A
Tetraedro	4 faces triangulares	4	6
Hexaedro	6 faces quadradas	8	12
Octaedro	8 faces triangulares	6	12
Dodecaedro	12 faces pentagonais	20	30
Icosaedro	20 faces triangulares	12	30

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Para que haja uma compreensão de como são formados os Poliedros Regulares, acredita-se que o aluno deve passar por um processo de construção destes, com a finalidade de permitir que as relações mostradas no quadro acima sejam percebidas por ele. Como acrescenta Kaleff (2003), é importante considerar que o aluno deve ser incentivado a investigar e fazer essa descoberta, pois, dessa forma, o desenvolvimento das noções matemáticas se torna mais significativo. A respeito da construção de modelos poliédricos, a autora constata que:

> [...] uma das características mais interessantes das atividades que envolvem construções de modelos de poliedros é o questionamento que surge ao longo dos processos de construção e que proporciona ao aluno a oportunidade para conjecturar sobre diversas situações geométricas. O constante questionamento sobre o que o aluno constrói e sobre o que ele observa lhe proporciona a oportunidade de descobrir as propriedades geométricas que desejamos enfatizar, tomar consciência delas, ajudando-o a construir o correspondente significado geométrico. (KALEFF, 2003, p. 21).

Entendendo assim, este trabalho apresenta uma proposta de construção de conceitos geométricos através da dobradura de papel. No âmbito da Geometria, a dobradura permite várias construções geométricas, sejam elas em duas ou três dimensões. O fato é que sempre se parte de uma folha de papel, ou seja, mesmo que o objetivo seja confeccionar um poliedro, passa-se, primeiro, por uma construção bidimensional, que não deve ser desconsiderada. Todas as formas que forem surgindo ao longo do processo de confecção devem ser levadas em conta para agregar conhecimento ao aluno e permitir que ele estabeleça as conexões entre as Geometrias plana e espacial.

Direcionando o foco para os Poliedros Platônicos, é possível encontrar uma vasta maneira de representá-los apenas dobrando papel. A esse respeito, ressalta Kaleff que:

> [...] a análise das características geométricas dos poliedros regulares de Platão proporciona ao aluno a oportunidade de observar uma grande variedade de conexões entre as figuras geométricas planas e as espaciais, levando-o a descobrir várias situações em que surgem padrões de regularidade geométrica. (KALEFF, 2003, p. 21).

Enfatiza-se, nesse sentido, que, cada vez mais, a dobradura de papel vem sendo utilizada ema sala de aula no ensino da Matemática. Por ser uma forma criativa e econômica, ela vem ganhando espaço nas escolas que, muitas vezes, são desprovidas de verbas para aquisição de materiais concretos.

Assim como as figuras geométricas de um modo geral, as construções geométricas tradicionais feitas por dobraduras também são regidas por um conjunto de axiomas que permite provar a existência de cada dobra possível de ser realizada. Rafael (2011) destaca o matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita, da universidade de Pádua, na Itália – que nasceu no Japão, mas muitos anos na Itália – que, na década de 1970, criou as seis operações conhecidas como axiomas de Huzita. Em 2001, Koshiro Hatori mostrou uma dobragem diferente dos axiomas existentes, surgindo, então, o sétimo axioma. A esse respeito, Rafael (2011) ressalta que “Estes axiomas (que na realidade são operações) descrevem operações básicas que se podem efectuar em Origami e permitem caracterizar formalmente o tipo de construções geométricas que é possível fazer com Origami.” (RAFAEL, 2011, p.19).

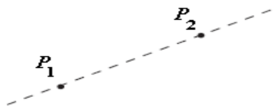
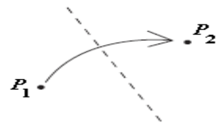
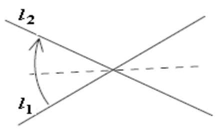
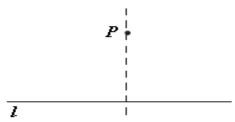
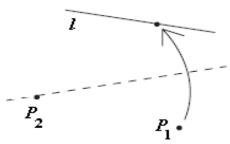
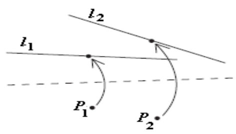
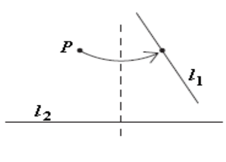
Ainda de acordo com a autora, foi somente em 2003 que Robert Lang publicou um estudo em que mostra as sete combinações de dobras conhecidas agora como axiomas de Huzita-Hatori. Em 2010, Lang publica outro artigo, no qual apresenta crédito apropriado a Jaques Justin para o 7° axioma. Segundo Lang (2010), o francês Jacques Justin publicou um artigo “*Resolution par le pliage de l'équation du troisieme degre et applications geometriques”,* em 1989, no qual enumerou 7 possíveis combinações de alinhamento, sendo o último apresentado antes da descoberta de Hatori, permitindo a definição das combinações tanto como Huzita-Hatori, quanto como Huzita-Justin.

De acordo com Lang (2010), isso mostra que pesquisadores independentes expressaram as mesmas leis universais na linguagem matemática. Essas operações permitem combinações entre si para se obter qualquer construção simples (dobra única) em Origami.Segundo Rafael (2011):

> Na teoria matemática das construções geométricas com dobragens de papel, os sete axiomas de Huzita-Hatori chegam para definir o que é possível construir com dobragens simples. (Admitindo dobragens simultâneas já vamos além do que é descrito pelos axiomas de Huzita-Hatori, passando, por exemplo, a ser possível dividir um ângulo genérico em cinco partes iguais ou a construir o polígono regular de onze lados, algo que não é possível recorrendo apenas a dobras simples). (RAFAEL, 2011, p. 19).

Lang (2003), citado por Monteiro (2008), realizou um estudo completo de todas as dobragens possíveis que especificam um único vinco e comprovou a existência de somente 7 axiomas, representados na tabela 1:

Tabela 1 - Axiomas do Origami

Descrição dos Axiomas	**Diagramas**
Axioma 01: Dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma única dobra que passa pelos dois pontos.	
Axioma 02: Dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma única dobra que as torna coincidentes.	
Axioma 03: Dadas duas retas, I_1 e I_2, há uma única dobra que as torna coincidentes.	
Axioma 04: Dados um ponto P e uma reta I há uma única dobra perpendicular a I que passa por P.	
Axioma 05: Dados dois pontos, P_1 e P_2, e uma reta I, se a distância de P_1 a P_2 for igual ou superior à distância de P_2 a I, então há uma única dobra que faz incidir P_1 em I e que passa por P_2.	
Axioma 06: Dados dois pontos P_1 e P_2, e duas retas I_1 e I_2, se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma única dobra que faz incidir P_1 e, I_1 e P_2 em I_2.	
Axioma 07: Dado um ponto P e duas retas I_1 e I_2, se as retas não forem paralelas, há uma única dobra que faz incidir P em I_1 e é perpendicular a I_2.	

Fonte: Adaptado de MONTEIRO, 2008, p. 9-10.

Como consequência desses axiomas, é possível resolver equações, efetuar a trissecção de um ângulo, duplicar um cubo, demonstrar teoremas, dentre outros. Isso possibilita ao aluno desenvolver sua destreza manual, além de colaborar com a compreensão de conceitos geométricos, tais como: simetrias, congruências, ângulos, razões, proporções *etc*. Esta estrutura axiomática possibilita, portanto, uma compreensão da Matemática que há por trás de uma simples dobradura de papel.

Tendo estabelecida uma relação entre a Matemática e o Origami, é possível delinear os caminhos os quais esta pesquisa percorre, possibilitando o apontamento do Origami como um recurso metodológico para as aulas de professores que ensinam Matemática.

A proposta é criar linhas dobrando papel, ao invés de usar régua, e ensinar uma variedade de conteúdos matemáticos a partir de uma aula lúdica, criativa e direcionada ao ensino da Geometria. Rego, Rego e Gaudêncio Jr. mostram que:

> Na realização das dobraduras, os estudantes familiarizam-se com formas geométricas, movimentos de transformação e múltiplas linhas de simetria dentro de uma mesma figura. Noções de retas perpendiculares, retas paralelas, figuras planas e sólidas, congruência, bissetrizes de ângulos, relações entre áreas e proporcionalidade poderão ser introduzidas de maneira igualmente eficaz. As dobraduras possibilitam ainda o desenvolvimento de atividades relacionadas ao estudo de frações, aritmética, álgebra e funções, dentre outros. (REGO; REGO; GAUDÊNCIO JR., 2003, p. 18).

Os autores indicam o uso do Origami nas atividades de Matemática voltadas para:

- A construção de conceitos;
- A discriminação de forma, posição e tamanho;
- A leitura e interpretação de diagramas;
- A construção de figuras planas e espaciais;
- O uso dos termos geométricos em um contexto;
- O desenvolvimento da percepção e discriminação de relações planas e espaciais;
- A exploração de padrões geométricos;
- O desenvolvimento do raciocínio do tipo passo a passo;
- O desenvolvimento do senso de localização espacial. (REGO; REGO; GAUDÊNCIO JR., 2003, p.19-20).

Corroborando a posição dos autores, percebe-se que a dobradura de papel é capaz de despertar o processo evolutivo do pensamento algébrico, aritmético e geométrico. Ela também permite que se construam conceitos a partir de cada dobra efetuada, além de explorar a percepção visual do aluno.

Além de discutir conteúdos matemáticos, o Origami ainda permite estabelecer relações com outras disciplinas, como apontam Rego, Rego e Gaudêncio Jr. (2003): na Arte, desenvolve a criatividade, o controle motor e aprimora o senso estético; nas Ciências Físicas e Biológicas, é utilizado na confecção de animais e plantas, na reciclagem de papel e para testar a flutuação de barquinhos de papel; na História e na Geografia, permite explorar temas como a história e o surgimento do papel, o percurso das invenções através dos séculos e entre os povos; nas Linguagens, estimula a percepção de outras formas de comunicação e produção de textos interdisciplinares; na vida social, promove o trabalho em grupo, a atividade cooperativa, habilidade de concentrar e memorizar, além de ser utilizado em terapia ocupacional. Portanto, nessa concepção, o Origami não é visto apenas como uma "arte de dobrar papel", mas, sim, como um objeto de aprendizagem contido de um corpo axiomático com embasamento matemático, a fim de assegurar um ensino significativo.

Genova (2001) assegura que essa arte pode desempenhar um papel mediador, articulando as construções com elementos ou conceitos geométricos e Costa (2007) aposta no Origami como apoio na construção do conceito. Porém, para se ensinar Geometria através do Origami, o professor precisa, primeiramente, conhecer e dominar a técnica. A seguir, será abordado o desenvolvimento dessa pesquisa bem como o contexto em que ela foi realizada.

3 A PESQUISA

Este trabalho se configura como uma pesquisa de investigação qualitativa, a qual Bogdan e Biklen (1994, p. 16) definem como "um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características." Neste tipo de pesquisa, se recolhem dados qualitativos através de questões que procuram investigar fenômenos e se privilegia a compreensão dos comportamentos no olhar dos sujeitos investigados.

Ainda sob a orientação dos autores, foi realizado um trabalho de campo seguindo a estrutura sugerida: acesso, início, participação, entrevistas, fotografias e saída de cena. Dentre essas, se destaca a participação. O contínuo participante / observador – uma vez que, para o desenvolvimento desse trabalho, é relevante que o observador participe efetivamente, pois dependem dele as orientações para a construção dos modelos matemáticos realizados através do Origami.

No que tange à estrutura da pesquisa, as entrevistas foram substituídas pelos questionários, pois, como mostram Fiorentini e Lorenzato (2012), as entrevistas se diferenciam do questionário porque podem ser aplicadas para um número maior de pessoas sem que haja contato direto entre pesquisador e pesquisado.

O grupo composto por 14 professores participou de oficinas que ocorram durante um momento pedagógico destinado à formação de professores em uma escola da rede municipal de Belo Horizonte.

As duas oficinas foram organizadas em dois dias e divididas em três momentos cada com as atividades descritas abaixo:

- 1º Momento: Explorando os Axiomas do Origami;
- 2° Momento: Consequências dos Axiomas de Huzita-Hatori
- 3° Momento: Construindo Poliedros Platônicos com Origami.

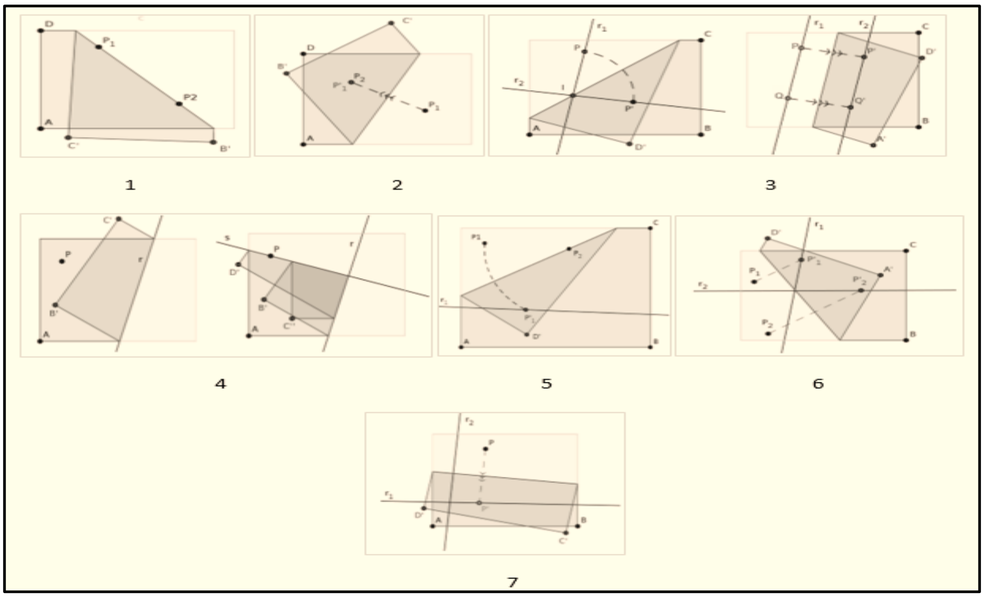
As atividades contidas na oficina foram elaboradas de forma que o participante pudesse perceber a evolução da técnica do Origami. Para tanto, procurou-se apresentar uma noção inicial da técnica que estabelecesse uma relação axiomática com a Matemática. Em seguida, foi mostrado que essa conexão com o ensino gera consequências que possibilitam a realização de demonstrações. Para, enfim, construir os Poliedros Platônicos, aproveitando as definições e conceitos que possam surgir no decorrer das dobragens. A esse respeito, Genova (2001) explana que:

> Na geometria ensinada na escola, a importância da construção é frequentemente subestimada. A passagem da manipulação de materiais ou do reconhecimento de formas aos conceitos teóricos costuma ser muito abrupta. Uma mediação natural entre tais níveis de abordagem da geometria são as construções geométricas. O origami pode desempenhar esse papel mediador de modo interessante e fecundo. (GENOVA, 2001, p.119).

Assim, utilizando o Origami como um recurso metodológico, são apresentados os três momentos da oficina realizada, contendo as atividades aplicadas em cada um deles.

No primeiro momento as atividades propostas tinham, como finalidade, que os professores realizassem experimentos, utilizando pedaços de papeis, executando dobras que os levassem a identificar axiomas apresentados, como mostra a figura abaixo.

Figura 2 – Corpo Axiomático da Geometria do Origami

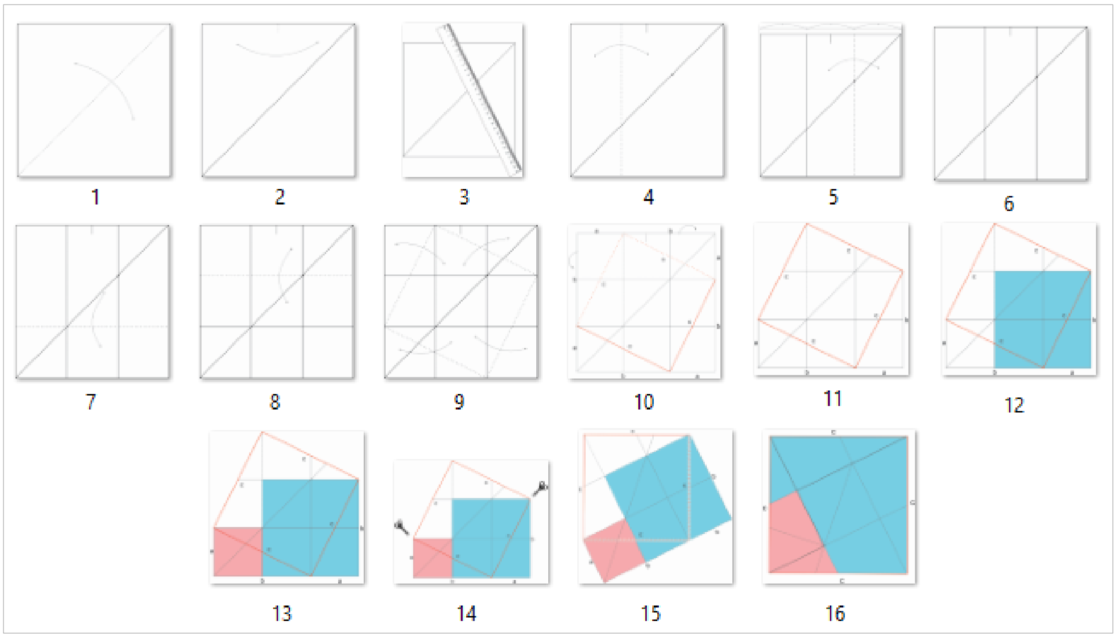


Fonte: CAVACAMI; FURUYA, 2010, p. 3-6.

Já o segundo momento da oficina foi destinado à constatação da aplicabilidade de alguns axiomas apresentados. Como a maior parte dos sujeitos da pesquisa atua no Ensino Fundamental, foi selecionada uma atividade relacionada à Geometria que pode ser aplicada nesse nível de ensino. Para tanto, foi proposta a realização da demonstração do Teorema de Pitágoras como consequência do quarto axioma.

O quarto axioma, como já dito, descreve que "dados um ponto *P* e uma reta *r*, existe uma única dobra que é perpendicular à *r* que passa por *P*." (RAFAEL, 2011, p.19). Para realizar a demonstração do Teorema de Pitágoras, toma-se uma folha A4 branca, fazendo com ela um quadrado. A partir daí, divide-se esse quadrado em três partes iguais, utilizando técnicas do Origami. Com o quadrado dividido em três partes iguais, propõe-se uma análise dos triângulos obtidos com a junção de alguns pontos. Ao perceber que esses são triângulos congruentes, inicia-se a demonstração que comprova, por sobreposição, que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa (FIG. 3).

Figura 3 – Demonstração do Teorema de Pitágoras pela técnica do Origami

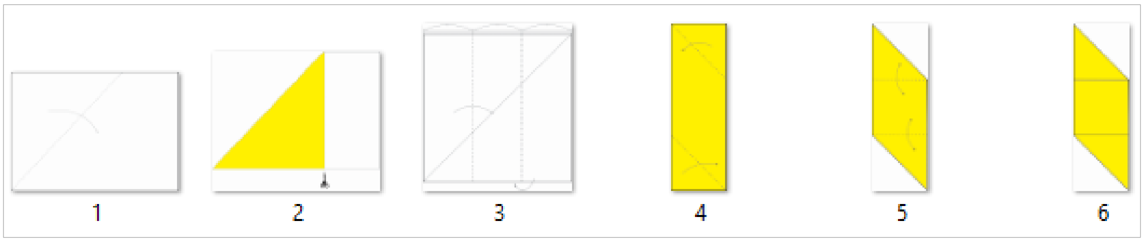


Fonte: PIMENTA, 2017, p 49.

Para finalizar a oficina, o terceiro momento foi destinado à construção dos cinco Sólidos Regulares a partir das dobras feitas com o Origami. No decorrer dessas construções, foram abordados conceitos importantes da Geometria Plana que trazem consigo a intenção de contribuir com o estudo da Geometria Espacial.

Com os participantes dispostos em grupos, foram confeccionados, primeiro, os módulos do hexaedro, que possui dobragens mais simples e fáceis de encaixar (FIG. 4).

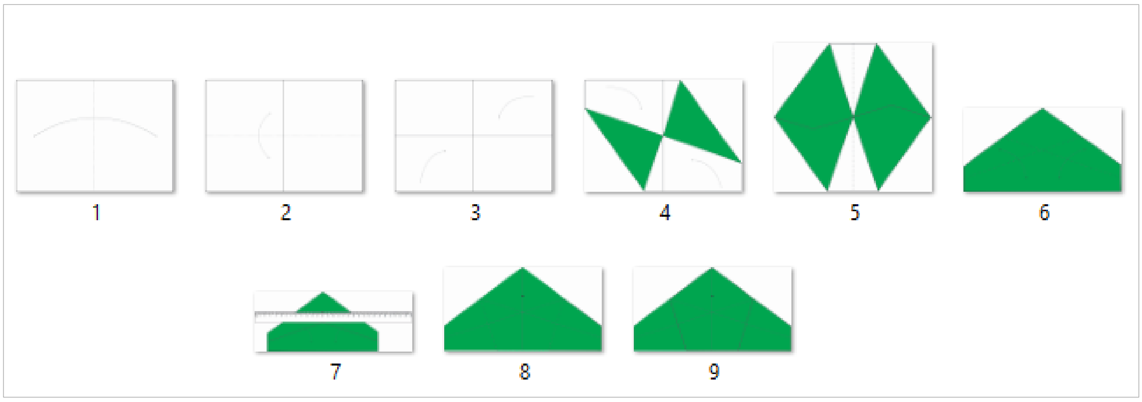
Figura 4 – Origami de um dos módulos do hexaedro



Fonte: PIMENTA, 2017, p 49.

Após a finalização do hexaedro, foram produzidas as peças do dodecaedro, que possui um grau de dificuldade superior ao hexaedro no que tange à confecção dos módulos, porém, não apresenta um alto grau de complexidade no encaixe, como mostra a figura 5.

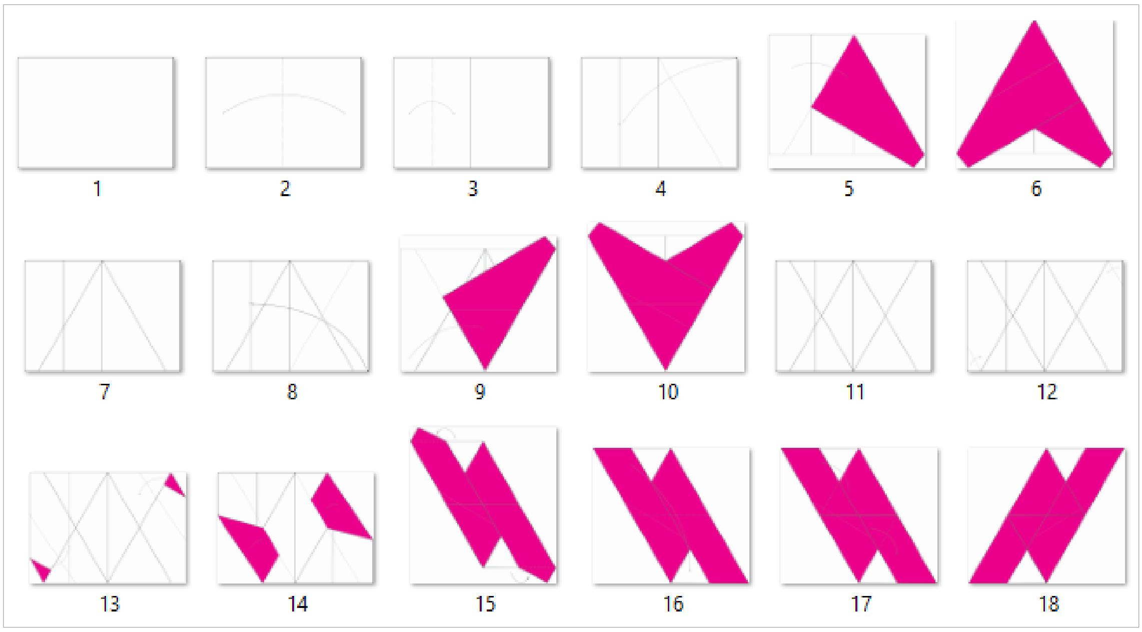
Figura 5 – Dobradura de um dos módulos do dodecaedro



Fonte: PIMENTA, 2017, p 50.

Por fim, agora com os participantes detendo certo domínio da técnica, estes foram orientados para a confecção do módulo que gera a montagem dos três sólidos de faces triangulares (tetraedro, octaedro e icosaedro). Este módulo é um pouco mais complexo, pois possui muitas dobras e um caminho extenso de marcações de vincos até chegar ao modelo final (FIG. 6).

Figura 6 – Dobradura de um dos módulos dos sólidos de faces triangulares



Fonte: PIMENTA, 2017, p 50.

Com a finalidade de complementar a pesquisa, foi aplicado um questionário como um recurso investigativo que objetivou levantar informações relevantes a respeito das atividades aplicadas nas oficinas. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012, p.116), ele "é um dos instrumentos mais tradicionais de coletas de informações e consiste numa série de perguntas que podem ser: fechadas, abertas ou mistas."

Optou-se por elaborar o questionário com maior parte de questões abertas e apenas algumas fechadas, sobre as quais os autores discorrem que:

> As questões fechadas são mais fáceis de serem respondidas, compiladas e tratadas estatisticamente. As questões abertas, por sua vez, prestam-se melhor a coletar informações qualitativas. No entanto, são mais difíceis de serem obtidas, pois exigem do sujeito que responde maior atenção e tempo. As informações fornecidas pelo questionário aberto podem ser agrupadas em categorias, sendo possível também sua quantificação. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 117).

Portanto, por meio desse método, foram elaboradas doze questões que visavam obter as impressões dos estudantes e professores que participaram da oficina. Esse questionário foi enviado ao endereço eletrônico dos participantes logo após a aplicação das oficinas. Dessa forma, os sujeitos pesquisados teriam tempo hábil, clareza e tranquilidade para responderem às perguntas sem se sentirem pressionados.

4 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Após uma breve explanação acerca do tema abordado, foi feito um questionamento a respeito do que os participantes entendiam sobre axioma. Como nessa oficina houve a participação de professores que atuam em áreas distintas, nem todos souberam opinar sobre o assunto. Já os profissionais da Matemática se sentiram mais à vontade em explicar, de modo geral, que axioma é uma verdade evidente e, por isso, não precisa ser provada ou demonstrada. Foi proposto, então, que eles experimentassem, em pequenos pedaços de papel, os axiomas do Origami, que foram apresentados nos slides.

A participação nesta atividade foi unânime. Alguns com mais dificuldades, outros com menos, e houve, também, os que não encontraram barreiras para executá-la. O importante de se observar é que todos se apropriaram do material e o exploraram ao máximo, colocando os pedaços de papel contra a luz, utilizando réguas e esquadros para confirmar as proposições e auxiliando uns aos outros.

Foram dedicados 60 minutos para a execução dessa tarefa. Ao finalizá-la, todos conseguiram adquirir um breve conhecimento sobre o corpo axiomático da Geometria do Origami. Partiu-se, então, para uma atividade que mostrou, na prática, a consequência de um dos axiomas abordados.

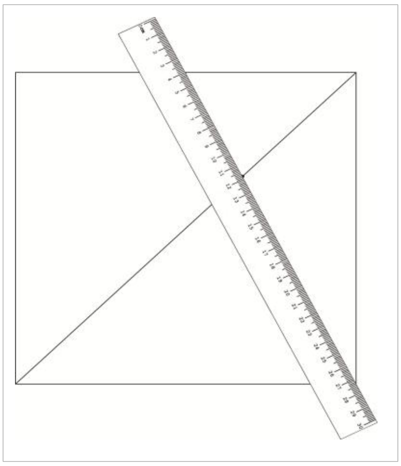
Inicialmente, nesse momento, foram apresentadas algumas consequências dos axiomas de Huzita-Hatori, a saber:

- Resolução de equações;
- Duplicação de um cubo;
- Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo;
- Demonstração do Teorema de Pitágoras.

Porém, essa última consequência foi escolhida para realizá-la passo a passo. Os professores se interessaram pela atividade. Foi percebido, ainda, que, de alguma forma, esse teorema está presente na memória de todos, mesmo daqueles que não atuam no campo matemático.

Para essa demonstração, foram distribuídos lápis de cor e tesoura entre os grupos e recorreu-se ao quarto axioma, a fim de constatar uma de suas consequências. Para dar início à demonstração, utilizou-se a técnica do Origami que divide uma folha quadrada em três partes iguais, sem recorrer à régua como um instrumento de medida. Essa atividade só utiliza a régua como apoio na marcação da interseção da reta obtida a partir do ponto médio do lado superior do quadrado (FIG 7), até o vértice do lado oposto a ele com a diagonal marcada para a obtenção do quadrado.

Figura 7 – Interseção indicada pela régua



Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

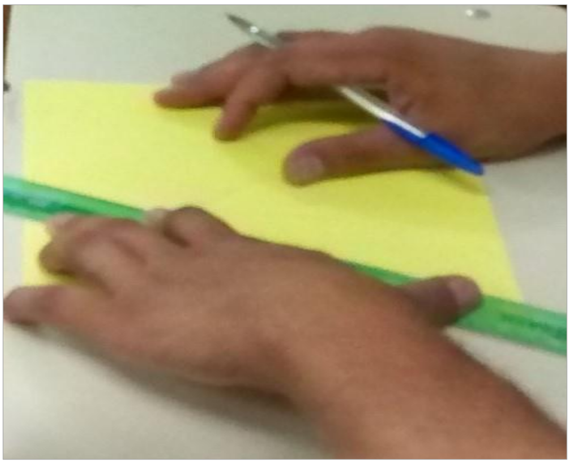
O ponto encontrado indica um terço do quadrado e essa é uma consequência do quarto axioma de Huzita-Hatori. Após esse procedimento, todos foram orientados para que dobrassem a folha sobre o ponto de interseção em todas as direções do quadrado, a fim de se obter uma marcação similar a um tabuleiro de jogo da velha.

Cada participante executou sua tarefa. Uns sozinhos, outros por intermédio de um colega ou, até mesmo, por intervenção da professora, mas todos conseguiram provar que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Nenhum dos professores conhecia essa atividade. Percebeu-se, através das falas, interesse nos profissionais da área da Matemática em realizá-la em sala de aula. Um professor que atua no nono ano compartilhou sua frustração em tentar executar alguma demonstração em suas aulas. Segundo ele, os alunos, de um modo geral, consideram difícil e dizem que ele quer "complicar as coisas" ao invés de explicar. Ele avaliou esse método como sendo didático e acredita ser possível reproduzi-lo em suas aulas, pois percebe uma compatibilidade entre a forma de apresentar o passo a passo da demonstração e o entendimento dos alunos.

Essa atividade foi realizada no segundo dia de oficina e contou com 4 horas de duração. Primeiro, foi proposta a construção do hexaedro e como os professores já haviam realizado a demonstração do Teorema de Pitágoras, eles conheciam os primeiros passos para a produção dos módulos que consistem em dividir uma folha quadrada em três partes iguais. (FIG. 8).

Figura 8 – Professor fazendo a divisão do quadrado em três partes iguais



Fonte: Arquivos da pesquisadora.

A divisão de uma folha quadrada em três partes iguais provém de uma técnica do Origami que consiste em fazer as demarcações apenas com dobras. Porém, indicou-se o uso de uma régua para que pudessem encontrar o ponto de interseção que aponta exatamente um terço da folha de papel, evitando, assim, que ela ficasse muito marcada com vincos que não favoreceriam a estética do sólido.

A orientação para a execução desse módulo é tranquila e todos conseguiram fazer. Após a confecção, eles reuniram, coordenaram as seis peças de forma intuitiva entre os componentes de cada grupo e realizaram os encaixes necessários para finalizar a montagem do sólido.

Uma professora que atua nas séries iniciais assegurou que esse tipo de atividade pode ser executada por seus alunos do quarto ano do Ensino Fundamental. Nesse nível de ensino, os sólidos geométricos já aparecem nos livros didáticos e ela considera que se eles tivessem a oportunidade de construí-los em sala de aula, poderiam compreender melhor seus elementos fundamentais: vértices, arestas e faces.

Sua montagem é simples, pois existem bolsos de encaixes em suas extremidades o que dá firmeza na hora de executá-la. Mesmo realizando a atividade pela primeira vez, a maioria dos participantes conseguiu realizar os encaixes sozinhos, não sendo necessária a intervenção de um colega ou da professora.

A próxima produção foi a do dodecaedro que apesar de possuir uma sequência maior de orientações até obter a peça finalizada, não há um alto grau de dificuldade, tanto que todos conseguiram executar a atividade com êxito. Essa é outra construção na qual também foi sugerido o uso da régua para marcar um ponto de interseção. Essa interseção também pode ser determinada somente através de dobras, porém, percebe-se ser mais didático utilizar a régua, pois há garantia de maior exatidão no ponto almejado.

A montagem desse poliedro contou com um trabalho cooperativo, uma vez que, foram produzidas doze peças e, para encaixá-las pela primeira vez, pode parecer um pouco complicado. Esse modelo não possui bolsos de encaixes em todas as suas extremidades, logo, à medida que se coloca uma nova peça, outra já encaixada pode se soltar. Sendo assim, é de extrema relevância que um componente do grupo envolva o sólido parcialmente montado em suas mãos enquanto o outro vai realizando o encaixe até chegar ao último módulo (FIG. 9).

Figura 9 – Professores em trabalho colaborativo ao montar o dodecaedro

Fonte: Arquivos da pesquisadora.

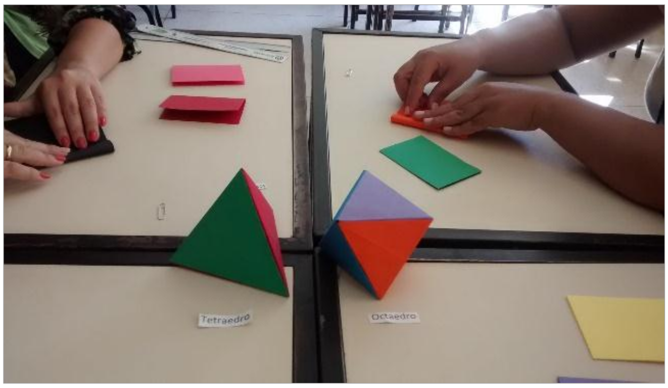
Os três sólidos restantes foram obtidos através da mesma instrução que produz os módulos que geram as faces triangulares, porém, em tamanhos diferentes. Para tanto, todos foram orientados para que dividissem, cuidadosamente, entre os participantes, as folhas de papel separadas no kit que lhes foi entregue contendo 8 folhas A4 inteiras, 4 divididas ao meio e 22 divididas em quatro partes, a fim de favorecer e agilizar o desenvolvimento das atividades.

A produção desse módulo requer uma atenção maior, pois, além de ser mais trabalhosa, por possuir muitos passos, é diferente dos outros que foram feitos até o momento que continham um módulo para cada face do poliedro. Para obter o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, foi necessário construir módulos correspondentes à metade do número de cada face, sendo eles simétricos entre si, o que foi orientado pela professora.

As peças finalizadas são compostas por quatro triângulos equiláteros que, sobrepostos um ao outro, possuem uma pequena abertura para o encaixe. O tetraedro é obtido a partir do encaixe de duas peças simétricas. Já o octaedro precisa de quatro peças, que serão encaixadas duas a duas, observando a congruência entre ambas, posteriormente encaixadas entre si. O icosaedro, por sua vez, segue a mesma lógica do tetraedro, porém, unindo as dez peças.

Os participantes tiveram uma dificuldade maior para executar essa tarefa, porém, todos os grupos conseguiram montar seus respectivos poliedros, como indicado na figura 10.

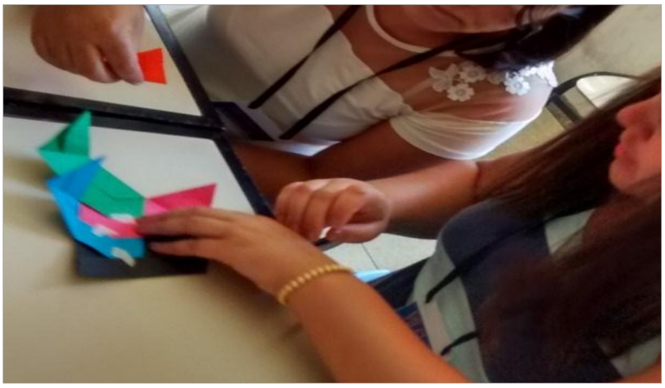
Figura 10 – Professores na montagem de seus poliedros



Fonte: Arquivos da pesquisadora.

Devido ao fato de a montagem do icosaedro ser bem trabalhosa, foi sugerido o uso de uma fita adesiva para garantir a fixação dos módulos; porém, ressalta-se que em sua execução tradicional, o Origami não faz uso de nenhum tipo de material colante. (Figura 11).

Figura 11 – Professores, na montagem do icosaedro



Fonte: Arquivos da pesquisadora.

Nem todos os grupos conseguiram executar a tarefa proposta até o final, ou seja, alguns precisaram da intervenção da professora para realizar a montagem do poliedro regular que contém vinte faces triangulares.

A confecção desses três últimos sólidos gerou uma polêmica entre os professores, havendo aqueles que diziam que esse tipo de atividade não poderia ser realizada com alunos, e outros, contrários, que acreditavam ser possível executar essa proposta em sala de aula, com paciência, perseverança e dedicação.

Apesar das divergências de opiniões, com relação à necessidade de o professor possuir o domínio da técnica antes de propor a atividade para sua classe, todos eram unânimes. Por isso, a importância de todos produzirem pelo menos um módulo de cada poliedro, pois esse trabalho tem a finalidade de ajudar na memorização do passo a passo.

Percebeu-se, no decorrer da oficina, que todos os professores se envolveram com as atividades e que consideraram colocá-las em prática, fazendo seu uso em sala de aula. Observou-se, ainda, que, ao manipular o papel, eles fizeram descobertas, se surpreendiam com alguns resultados. Essa afirmação pode ser feita, por exemplo, quando da divisão da folha quadrada em três partes iguais.

Outro ponto foi que, ao findar a oficina, todos queriam levar os sólidos construídos consigo, quando foi sugerido que entrassem em acordo ou que fosse realizado um sorteio entre eles para ver quem ficaria com as peças. Alguns participantes fizeram um módulo extra de cada poliedro e, quando questionados pela iniciativa, disseram que era para ajudar em uma reprodução futura. Este foi considerado um interessante método, além de ratificar um dos objetivos deste trabalho, que é produzir um material que dê orientação aos professores na reprodução dos modelos.

Apenas 7 dos 14 professores responderam ao questionário, 6 lecionam ou lecionaram para o Ensino Fundamental II, 3 para o Ensino Médio e apenas 1 para o Ensino Fundamental I.

Sobre a importância do ensino da Geometria no ensino básico, houve opiniões distintas, mas que apontavam para a mesma direção: o reconhecimento do espaço e forma. Além disso, como se obteve respostas de profissionais que atuam em áreas distintas, foram selecionadas algumas correspondentes aos professores de Artes, Matemática e Física, respectivamente, por possuírem uma visão crítica sobre assunto em sua área de atuação, quer sejam:

P_3: *"É essencial para o entendimento das formas, proporções etc. Para o ensino de arte, auxilia no estudo de obras de arte e de arquitetura e dá base para a aplicação em estudos de arte linear, tendo em vista que o que dá origem às formas geométricas são o ponto e a linha."*

P_5: *"Acredito que o ensino da geometria na escola básica, como também no ensino superior, desenvolve um papel importante na constituição da formação intelectual e até mesmo cultural dos estudantes. A geometria possibilita, aos alunos, uma perspectiva de espaço e forma que poderão ser utilizados pelos mesmos durante a sua vida como cidadãos, além disso, podem possibilitar um melhor entendimento das artes, das engenharias e das culturas."*

P_7: "A Geometria não é só aplicada na Matemática, mas é importante em diversas áreas, como na Física, que utiliza seus conceitos e definições para descrever vários fenômenos da natureza, como a reflexão e a refração da luz."

É interessante observar, portanto, que, mesmo com opiniões distintas, o uso da Geometria é visto pelos professores como essencial em diferentes áreas do conhecimento, seja para auxiliar na execução de atividades, dar embasamento em estudos diversos, para definir conceitos ou, ainda, para contribuir com a formação cidadã dos alunos.

Em relação à relevância da abordagem dos Poliedros Platônicos nas aulas de Geometria, as opiniões foram comuns e destacaram a importância de se estudar sólidos regulares com propriedades tão características. Um professor de Matemática discorre que:

P_5: *"Com certeza, principalmente por serem os únicos poliedros regulares. É possível fomentar importantes conjunturas e reflexões a partir de suas particularidades."*

Já o posicionamento do professor de Física chama a atenção por considerar importante que o aluno tenha conhecimento sobre o assunto, que serviria como um pré-requisito para suas aulas. Sobre isso, ele diz que:

P_7: *"Particularmente sim. Primeiro pela questão histórica envolvida, para abordar o desenvolvimento da Matemática no que tange à Geometria. Em segundo, porque, no Ensino Médio, no estudo da Física, quando se trata da evolução dos modelos planetários, Kepler propôs um modelo baseado nesses sólidos, no qual os planetas até então descobertos se relacionavam com esses sólidos. Assim, ao citar os poliedros platônicos, seria interessante que os alunos já soubessem do que se trata."*.

Em sua totalidade, os professores que responderam ao questionário já conheciam a técnica do Origami. As experiências relatadas sobre o assunto foram diversas, mas, em sua maioria, todas tiveram alguma relação com o ensino, seja na escola básica, na faculdade de artes visuais, em um curso de capacitação ou numa busca para complementar as atividades de suas aulas.

Dois professores de Matemática já conheciam técnicas do Origami que geravam alguns sólidos regulares, sobre o qual afirmam:

P_5: *"Já conhecia, pois, havia participado de outros minicursos e oficinas, no entanto, [...] nas outras ocasiões não consegui entender as etapas de confecção dos origamis, já nessa oficina tive uma melhor aprendizagem devido às dobraduras serem mais simples.*

P_6: *"Sim. Já havia trabalhado com algumas dobraduras em sala de aula, principalmente de animais como o tsuru e alguns poliedros (tetraedro, hexaedro e dodecaedro apenas), porém, exigiam dobras mais complicadas."*

Percebe-se, então, nos relatos dos professores, que a técnica do Origami apresentada nessa oficina foi vista como acessível, pois, consideraram a abordagem mais simples em relação àquelas que eles conheciam anteriormente. Considera-se este um ponto relevante, pois mostra que as dobragens propostas podem ser futuramente reproduzidas pelos participantes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa se propôs a investigar se há benefícios na aprendizagem geométrica com a construção dos Poliedros Platônicos a partir do Origami, tendo, como público-alvo, professores que ensinam Matemática.

Procurou-se, nos trabalhos Prieto (2002) e Rafael (2011), entre outros, buscar, na história da Geometria, os registros sobre os Poliedros Platônicos e conhecer o contexto histórico do Origami. Encontrou-se, nas obras de Rego, Rego e Gaudêncio Jr (2003), Kaleff (2003) e Genova (2001) embasamentos teóricos e propostas de ações que mostram os benefícios da aprendizagem geométrica através do Origami, em especial na construção dos Poliedros Platônicos.

Após a análise das atividades e questionário verificou-se que:

- O processo de construção dos modelos em Origami foi estrutural para a elaboração dos conceitos, tais como: ponto médio, retas (paralelas, perpendiculares e concorrentes), diagonais, eixos de simetria, alturas, bissetrizes, medianas, mediatrizes, ângulos, proporções, semelhanças, dentre outros. Para realizar algumas dessas construções, era importante saber tais conceitos, mas não um conceito pronto e acabado, e, sim, aquele que podia ser percebido e definido a partir do momento em que houvesse a necessidade de sua aplicação, uma vez que ele seria exemplificado na dobragem. Como aponta Genova (2001), o Origami pode exercer o papel de mediador ao promover as construções geométricas associando o reconhecimento das formas aos conceitos teóricos.

- Conforme as dobraduras iam sendo executadas, os participantes notavam vários polígonos que se formavam: triângulos de vários tipos, quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios, pentágonos, dentre outros. Usufruiu-se dessa ocorrência para permitir que eles definissem essas figuras e determinassem suas propriedades. Em conformidade com Kaleff (2003), considerou-se que as situações de investigação e descoberta deviam ser incentivadas em sala de aula e identificou-se, nessas atividades, uma boa oportunidade para promovê-las. Mesmo sem conhecer algumas das propriedades em questão, os participantes puderam percebê-las ao manipular o papel que tinham em mãos.
- Depois de construir os módulos de cada Poliedro Platônico, os integrantes dos grupos usaram sua intuição e criatividade para realizar as conexões entre as peças, pois existem distintas possibilidades de exercê-las. Essa movimentação, como mostram Rego, Rego e Gaudêncio Jr (2003), contribuiu com o desenvolvimento da percepção geométrica plana e espacial, além de estabelecer relações entre esses entes. Os elementos, como arestas, vértices e faces, foram facilmente percebidos, os lados e ângulos das figuras foram medidos e aferidos com réguas, esquadros e transferidores de cada participante.
- Notou-se, na análise e interpretação do questionário, que uma das atividades que os participantes consideraram mais interessante foi a demonstração do Teorema de Pitágoras. Percebeu-se que essa tarefa proporcionou entusiasmo, curiosidade, surpresa e exuberância ao conseguirem demonstrar um Teorema tão usado na Matemática. Os participantes das oficinas disseram, em unanimidade, que aplicariam essa atividade em sala de aula. Isso mostra que eles descobriram mais um recurso metodológico para aplicar e reforça uma das vantagens de se ensinar Matemática através do Origami: a possibilidade de realizar demonstrações de uma forma mais clara e adaptável à linguagem para qualquer nível de ensino.

Esses são alguns dos benefícios que esta pesquisa conseguiu identificar na aplicação das atividades. Para tanto um dos destaques que se pode pontuar é a oportunidade que o Origami oferece ao professor no que tange a realização de propostas interdisciplinares, que acredita-se contribuir significativamente com o aprendizado no ensino básico.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R. C., BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**, Porto: Porto Editora, 1994.

CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando Geometria com Origami** – Apostila OBMEP, 2010.

COSTA, E. M. **Matemática e origami:** trabalhando frações. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática:** 6ª série. São Paulo: Ática, 2015.

ENGEL. P. **Origami**: from Angelfish to Zen. New York: Dover, 1994.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos – Coleção Formação de Professores. 3.ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

GENOVA. C. **Origami**: a milenar arte das dobraduras. 3.ed. São Paulo: Escrituras, 2001.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo poliedros**: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. 2.ed. Niterói: Editora da UFF, 2003.

KANEGAE, M.; IMAMURA, P. **Origami**: arte e técnica da dobradura de papel. São Paulo: Aliança Cultural Brasil Japão, 1989.

LANG, R. J. **Origami Geometric and Constructions**. 2010. Disponível em: <http://www.wiskundemeisjes.nl/wp-content/uploads/2008/02/origami_constructions.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2015.

MONTEIRO, L. C. N. **Origami**: história de uma geometria axiomática. 2008. 111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) — Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, Lisboa, 2008.

PRIETO, J. I. R. Matemáticas y Papiroflexia. **Revista Sigma**, n.21, p. 175-192, 2002. Disponível em: <http://www.cimat.mx/Eventos/secundaria10/03_Mats-y-Papiroflexia.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2015.

RAFAEL, I. Origami. **Educação e Matemática**. Lisboa, n.114 p. 16-22, set./out. 2011. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_EM114_pp16-22_4e6489d4d25fc.pdf>. Acesso em: 4 abr. 2015.

REGO, R. G.; REGO, R. M.; GAUDÊNCIO JR, S. **A geometria do origami**: atividades de ensino através de dobraduras. João Pessoa, PB: Editora Universitária da Universidade Federal da Paraíba, UFPB, 2002.